Vedere geometricamente: La percezione non iconica nella scuola primaria

Miglena Asenova
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo
NRD, Università di Bologna

Abstract. *The article presents a survey on the potential that the couple: "straightedge and compass construction - respective proof" has in primary school as regards the education to non-iconic perception in geometry, which is necessary for the correct nominalization and definition of the geometrical plane figures.*

Keywords: non-iconic perception, straightedge and compass construction, semiotic registers, proof, primary school.

Sunto. *L'articolo presenta un'indagine sulle potenzialità che la coppia: "costruzione con riga e compasso - relativa dimostrazione" ha nella scuola primaria per quanto concerne la formazione alla percezione non iconica in geometria, necessaria alla corretta nominalizzazione e definizione delle figure geometriche del piano.*

Parole chiave: modo di vedere non iconico, riga e compasso, registri semiotici, dimostrazione, scuola primaria.

Resumen. *El artículo presenta una encuesta sobre los potenciales que la pareja: "construcción con regla y compás - demostración relativa" tiene en la escuela primaria en relación a la formación de la percepción no icónica en geometría, necesaria para la correcta nominalización y definición de las figuras geométricas del plano.*

Palabras clave: forma no icónica de ver, regla y compás, registros semióticos, demostración, escuela primaria.

1. Introduzione

L'apprendimento in geometria si presenta come una delle principali problematiche in didattica della matematica soprattutto nei livelli scolastici della scuola secondaria (Duval, 2005; Fujita, Jones, & Miyazaki, 2011). Le cause delle difficoltà degli studenti in questo ambito sono state e continuano a essere studiate da molti ricercatori e i numerosi quadri concettuali e indirizzi di ricerca a livello internazionale mettono in evidenza, confermandola da più punti di vista, la complessità della problematica (Sinclair, Bartolini Bussi, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung, & Owens, 2017).

Le teorie specifiche dell'apprendimento in geometria sono legate principalmente a quattro impostazioni di base, di cui principalmente le ultime tre si configurano attualmente in uso in didattica della matematica:

- l'ipotesi intra-inter-trans figurale di Piaget e Garcia, il cui punto di vista, anche se oramai datato, è stato importante nello studio dell'apprendimento della geometria (Aglì, D'Amore, Martini, & Sandri, 1997);
- il modello dei coniugi van Hiele (1986), che offre una visione strutturale dell'apprendimento in geometria, secondo il quale l'apprendente passa da un livello a quello successivo, caratterizzato da un maggiore grado di astrazione, attraverso l'accumulo di esperienza e una formazione appropriata;
- la teoria dei concetti figurali (Fischbein, 1993; Mariotti & Fischbein, 1997), secondo la quale l'oggetto geometrico ha due componenti, una figurale e una concettuale; il ragionamento geometrico consiste in un'interazione tra questi due aspetti e le difficoltà e gli errori sono da intendersi in termini di disarmonia e conflitto tra le due componenti;
- l'approccio cognitivo di Duval (1998, 2005, 2017), secondo il quale lo studente apprende solo se è in grado di coordinare tra loro il registro figurale e il registro discorsivo, ma tale coordinamento richiede che il soggetto adotti un particolare modo di "vedere", che consente di effettuare una decostruzione dimensionale della figura geometrica, che Duval chiama "modo di vedere non iconico".

Nell'ultimo decennio sono state numerose le applicazioni di approcci e teorie, non necessariamente nate in ambito geometrico, all'apprendimento della geometria, soprattutto sotto la spinta ricevuta dall'ingresso nella scuola degli ambienti di geometria dinamica (AGD). (Per un approfondimento degli aspetti legati agli AGD, rinviamo a: Sinclair et al., 2017).

In seguito, diamo solo una breve panoramica delle principali direzioni di ricerca, che naturalmente non sono quasi mai a intersezione vuota.

Una parte delle ricerche nell'ambito dell'apprendimento della geometria riguarda più prettamente gli aspetti legati allo studio della natura della visualizzazione (Duval, 2005; Healy & Powell, 2013; Owens, 2015; Rivera, 2011) ma anche la maniera particolare con cui gli AGD possono aiutare a sviluppare la capacità di visualizzare e di trasformare mentalmente le immagini visualizzate (Presmeg, 2006).

Altre ricerche studiano invece quello che Mariotti (2015) chiama "invarianza della relazione tra gli invarianti" (p. 15), che possono essere invarianti di costruzione o derivati (Arzarello et al., 2002; Baccaglini Frank & Mariotti, 2010) e che costituiscono un aspetto importante nell'apprendimento delle definizioni (Mariotti & Fischbein, 1997) e nella classificazione degli oggetti geometrici.

Un altro indirizzo di ricerca riguarda le potenzialità delle costruzioni in AGD nell'esplorazione di proprietà e nella costruzione e nella verifica di congetture nonché nell'avvio alla dimostrazione (Leung, 2008; Leung, Baccaglini Frank, & Mariotti, 2013).

Altri studi ancora si spingono in direzione dell'indagine del ruolo, nell'apprendimento della geometria, dell'*embodiment*, dei gesti, del movimento in generale e dei diagrammi, anche in una prospettiva che rileva la necessità di una mediazione semiotica nell'uso degli artefatti, visti come strumenti che incorporano un sapere matematico nascosto, al quale lo studente non accede direttamente, ma tramite una mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Bartolini Bussi & Baccaglini Frank, 2015).

Tornando alle impostazioni teoriche di base nell'apprendimento della geometria, possiamo dire che ciò che accomuna molte delle ricerche appena elencate è il fatto che in esse le cause del fallimento degli studenti vengono attribuite a difficoltà di gestione da parte del soggetto apprendente delle proprietà prettamente matematiche e concettuali degli oggetti geometrici, ascrivendo tali difficoltà a un mancato adattamento del soggetto alle esigenze di armonizzazione tra le componenti figurale e concettuale e/o ad aspetti di natura strutturale, propri del sapere matematico in sé, che impediscono al soggetto in difficoltà di accedere al livello di astrazione adeguato per lo svolgimento di un dato compito (van Hiele, 1986). Tuttavia, anche le ricerche molto recenti nelle direzioni classiche del problema, non hanno del tutto fatto luce su alcuni aspetti fondamentali: per esempio, nel primo caso, continua a non essere ben chiaro *come* avviene l'adattamento *nel* soggetto che apprende, cioè quali siano le azioni concrete, cognitivamente significative, che egli deve compiere per armonizzare l'interazione delle componenti figurale e concettuale; mentre, nel secondo caso, non è ben chiaro in che cosa consista, sempre da un punto di vista cognitivo, il cambio di prospettiva necessario per passare da un livello a quello successivo. Ciò che distingue invece l'approccio all'apprendimento della geometria di Duval (1998, 2005, 2017) è il fatto che questo Autore indaga la problematica proprio da un punto di vista cognitivo, individuando cioè quello che potrebbe essere chiamato "l'armamentario di base" di cui lo studente deve disporre per poter affrontare con efficienza un compito in geometria. Potremmo dire che Duval studia, in generale, attraverso la teoria dei registri semiotici (Duval, 1993, 2017), gli invarianti cognitivi dell'apprendimento in matematica e, in particolare, quelle che, in una prospettiva ermeneutica in didattica della matematica (Bagni, 2009), potremmo chiamare le "condizioni di accesso" al circolo ermeneutico (Gadamer, 1960). Tali condizioni di accesso consentono di trasformare il circolo in una spirale (Jung, 2002, cit. in Bagni, 2009, p. 45), nel momento in cui lo studente si confronta con una rappresentazione (figura geometrica, testo di una definizione o di una dimostrazione, equazione etc.) che per sua natura, necessita di una interpretazione.

Concludendo, possiamo dire che, nonostante il campo delle ricerche nell'ambito dell'apprendimento geometrico sia molto ricco ed esteso, rimane a nostro avviso ancora molto da indagare in riferimento ai suoi aspetti strettamente cognitivi. Infatti, riteniamo che le diverse impostazioni teoriche di base messe in evidenza all'inizio del paragrafo non siano tra loro alternative, ma siano in un certo modo complementari e contribuiscano ad inquadrare il problema dell'apprendimento della geometria da prospettive diverse, tutte necessarie per avere una visione più completa possibile del problema ma una di esse, quella duvaliana, è da considerarsi propedeutica alle altre. Un approfondimento in questa direzione consentirebbe di gettare luce sulle cause più nascoste dei fallimenti o delle difficoltà degli studenti. La presente ricerca nasce dall'intenzione di fornire un esempio di indagine di questo tipo.

2. Quadro teorico di riferimento

Il quadro teorico di riferimento di questo lavoro di ricerca si basa su due componenti molto diverse tra loro dal punto di vista concettuale ma che contribuiscono alla sua unità progettuale. Per l'analisi degli aspetti cognitivi della problematica, per la conseguente formulazione delle domande di ricerca e per l'analisi delle relazioni tra le variabili d'azione abbiamo fatto riferimento all'approccio cognitivo all'apprendimento della geometria di Duval (1998, 2005, 2017), mentre per la realizzazione degli strumenti di rilevazione e dell'elaborazione dei dati riferiti a una delle domande di ricerca abbiamo fatto riferimento alla formula di comprensione di un testo matematico di D'Amore e Fandiño Pinilla (2015). Di seguito caratterizziamo brevemente e separatamente queste due componenti del quadro teorico di ricerca.

2.1. L'approccio cognitivo all'apprendimento in geometria secondo Raymond Duval

I lavori di Raymond Duval degli anni '90 (soprattutto Duval, 1993), riferiti alla particolare caratterizzazione epistemologica della matematica come un dominio di conoscenza in cui il ricorso alle rappresentazioni semiotiche è necessario per via dell'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, hanno determinato una svolta epocale nella ricerca in didattica della matematica. Il termine "paradosso di Duval" (Duval, 1993, p. 38) venne da allora in poi usato per descrivere il fenomeno paradossale secondo il quale chi apprende la matematica non può, proprio a causa dell'inaccessibilità diretta dei suoi oggetti, fare a meno di confondere l'oggetto matematico con la sua rappresentazione. L'attività matematica si svolge, secondo Duval, effettuando delle trasformazioni semiotiche all'interno dello stesso registro semiotico (i *trattamenti*) o passando da un registro semiotico a un altro (le *conversioni*). La comprensione e la capacità di produrre pensiero matematico nonché la competenza nella risoluzione di problemi è legata, secondo l'Autore, alla capacità di coordinare efficacemente registri semiotici differenti; si ha apprendimento solo se l'apprendente è in grado di effettuare una tale coordinazione (D'Amore, 2015; Duval, 2017). In riferimento all’apprendimento della geometria, all’aspetto generale, relativo ai registri semiotici, si aggiunge un altro aspetto particolare, legato alla visualizzazione. Una caratteristica dell’approccio cognitivo all’apprendimento della geometria (Duval, 1998, 2005, 2017) è legato al fatto che esso non prevede una declinazione delle capacità di visualizzazione sulla base all’età, come invece sembra caratteristico e tipico nei lavori di molti altri autori, non solo precedenti. Secondo questa prospettiva è il compito che il soggetto deve svolgere a imporre la necessità di interpretare gli oggetti geometrici in un modo determinato o in un altro; Duval distingue in questo senso come necessari un modo di vedere iconico e un modo di vedere non iconico.

Il modo di vedere iconico è legato alla percezione delle caratteristiche riferite alla forma, al contorno, agli aspetti per così dire topologici e metrici dell’oggetto geometrico (Figura 1) mentre il modo di vedere non iconico è legato a una decostruzione dimensionale della figura, che fa emergere le sue proprietà geometriche; essa è necessaria per lo svolgimento della maggior parte dei compiti in geometria (Figura 2).

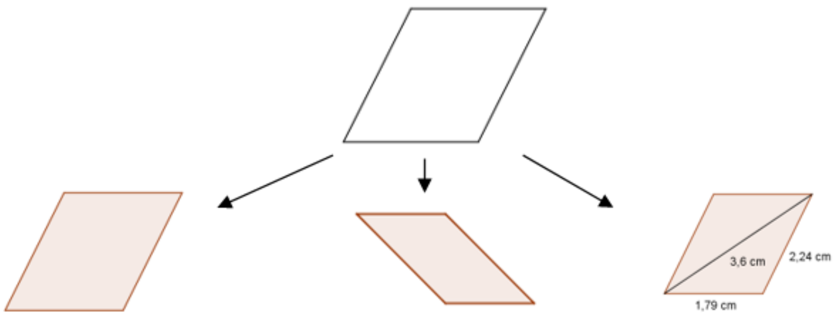


Figura 1. Modo di vedere iconico: sono gli aspetti topologici e metrici a essere messi in rilievo.

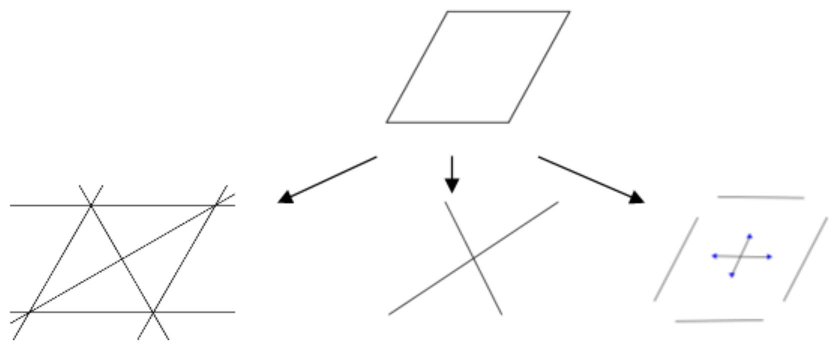


Figura 2. Modo di vedere non iconico: la figura geometrica viene decostruita dal punto di vista dimensionale; i vertici sono punti (enti 0-dimensionali) che si ottengono come intersezioni di rette (enti 1-dimensionali); le diagonali sono segmenti (enti 1-dimensionali) e il loro punto d’intersezione (ente 0-dimensionale) è il loro punto medio; i lati sono segmenti (enti 1-dimensionali) appartenenti a rette (enti 1-dimensionali), che sono a due a due parallele.

Duval (2005) caratterizza quattro modi di riconoscere le figure geometriche, i primi due tipici del modo di vedere iconico, gli ultimi due del modo di vedere non iconico: (1) *il modo di vedere del botanico*: il tipo di operazione richiesta al soggetto consiste nel riconoscere forme a partire dalle qualità visuali di un contorno; (2) *il modo di vedere del geometra*: il tipo di operazione che il soggetto deve compiere consiste nel misurare e sfruttare le misure rilevate e le conoscenze teoriche relative a esse per poter determinare delle grandezze; (3) *il modo di vedere del costruttore*: richiede che il soggetto sia in grado di decomporre una forma in tracciati costruibili mediante uno strumento (eventualmente passando attraverso tracciati ausiliari che non appartengono alla figura finale); (4) *il modo di vedere dell'inventore-artigiano*: richiede che lo studente riesca a trasformare una figura di partenza in un'altra, in modo da far emergere proprietà geometriche rilevanti per il compito assegnato.

Le immagini in figura (Figure 3.1–3.4) mostrano alcuni esempi che fanno comprendere meglio le caratteristiche dei quattro modi di vedere appena descritti.

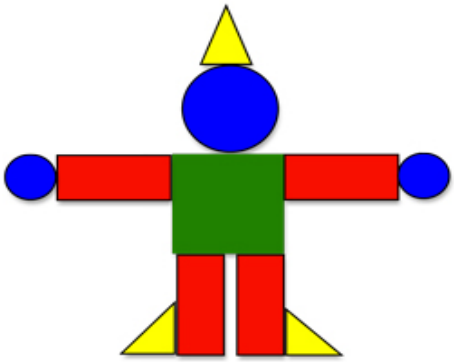


Figura 3.1. Modo di vedere del botanico: il soggetto distingue le forme in base alla loro forma, al loro contorno.

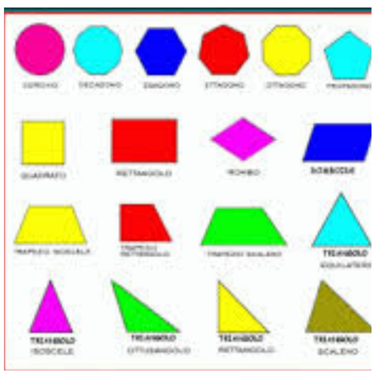


Figura 3.2. Modo di vedere del geometra: il soggetto distingue alcune invarianti che gli consentono di classificare le figure in sottoclassi e di decidere quali misure rilevare.

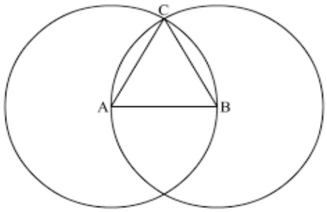


Figura 3.3. Modo di vedere del costruttore: al fine di costruire il triangolo equilatero, il soggetto deve sfruttare le proprietà della circonferenza.

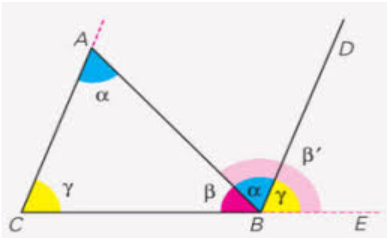


Figura 3.4. Modo di vedere dell'inventore-artigiano: al fine di dimostrare il teorema che afferma che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo ABC è 180°, è necessario aggiungere dei tracciati ausiliari al triangolo ABC, prolungare cioè il lato CB e tracciare la parallela ad AC passante per B.

L'analisi effettuata da Duval non si ferma però ai primi due livelli di distinzione tra i modi di vedere in geometria (iconico - non iconico da una parte; del botanico, del geometra, del costruttore e dell'inventore-artigiano dall'altra); l'Autore propone infatti un'analisi ancora più articolata, individuando il tipo di operazione che il soggetto deve compiere sulle forme visive a seconda che egli adotti uno dei quattro modi di vedere (Tabella 1) e chiarendo in quale modo si mobilitano le proprietà geometriche rispetto al tipo di operazione che deve essere compiuta (Tabella 2).

Da quanto appena esposto, sembrerebbe ovvio cogliere delle analogie tra la classificazione dei modi di vedere in geometria e i modi di concepire la geometria nei vari livelli scolastici. Tuttavia si deve tenere presente che la classificazione duvaliana non è legata a una maturazione genetica dell'individuo [come avverrebbe in una prospettiva di stampo piagettiano (Piaget, Inhelder, & Szeminsca, 1948)] né a una necessità di maturazione cognitiva dell'individuo per l'accesso a diversi livelli di astrazione (come avverrebbe in una prospettiva alla van Hiele) e nemmeno essa pone l'accento sulle proprietà dei concetti figurali (come avverrebbe in una prospettiva alla Fischbein-Mariotti). Infatti, il modo di vedere non iconico è acquisibile anche da parte di allievi di giovane età in quanto non richiede particolari competenze matematiche; esso è, al contrario, secondo Duval, un passaggio obbligato per accedere a tali conoscenze.

Tabella 1
I quattro modi di vedere dal punto di vista delle operazioni da compiere sulle forme visive (Duval, 2005)

Modo di "vedere"	Botanico	Geometra	Costruttore	Inventore-artigiano
Tipo di operazione richiesta per l'attività proposta sulle forme visive.	Conoscere forme a partire da qualità visuali di un contorno (privilegia una forma particolare come tipica).	Misurare i bordi di una superficie (perimetro) sul terreno o su un disegno (variazione in scala, quindi procedimento di misura).	Decomporre una forma in tracciati costruibili mediante uno strumento (passare per tracciati ausiliari che non appartengono alla figura finale).	Trasformare una figura in un'altra (aggiungere tracciati organizzativi nella figura finale per rendere possibile tale trasformazione).

Tabella 2
I quattro modi di vedere dal punto di vista della mobilitazione delle proprietà geometriche (Duval, 2005)

Modo di "vedere"	Botanico	Geometra	Costruttore	Inventore-artigiano
Come si mobilitano le proprietà geometriche rispetto al tipo di operazione.	Non ci sono relazioni tra le differenti proprietà (non è possibile dare una definizione matematica).	Le proprietà sono criteri di scelta per le misure da prendere (sono utili solo se rimandano a una formula che permette di eseguire dei calcoli).	Le proprietà geometriche si mobilitano come restrizioni di ordine di costruzione (certe proprietà si ottengono mediante una sola operazione, altre richiedono più operazioni).	Le proprietà si mobilitano implicitamente mediante una rete più completa di quanto non lo sia la figura di partenza (rette per la geometria piana o intersezioni di piani per la geometria solida …).

Il lavoro qui proposto, pur collocandosi dal punto di vista sperimentale nell'ambito dalla scuola primaria, si pone in effetti in una prospettiva aperta allo sviluppo di un curricolo in continuità tra i diversi livelli scolastici, proprio perché mette in luce come le possibili cause delle difficoltà degli studenti dei livelli scolastici superiori possano essere ricercate nel modo di vedere *la* geometria e di vedere *in* geometria ai livelli scolastici inferiori. È necessario infatti tenere presente che i diversi modi di vedere possono coesistere e che il ricorso all'uno piuttosto che all'altro possa dipendere dal contesto e che mentre alcuni modi di vedere (soprattutto quello del botanico) sorgono spontaneamente, anche sulla base dell'esperienza, altri richiedono una didattica specifica per essere appresi.

2.2. La formula di comprensione di un testo matematico secondo D'Amore e Fandiño Pinilla

Nelle attività in geometria che richiedono di adottare un modo di vedere non iconico, la comprensione del contenuto matematico avviene a partire da una sinergia tra visualizzazione e linguaggio (Duval, 2007, p. 3), anche se dal punto di vista semio-cognitivo vi sono delle distinzioni da fare sul ruolo che ciascuna di queste due componenti svolge all'interno del processo di apprendimento e sulle quali entreremo in dettaglio nel capitolo 3. La componente del linguaggio si condensa in una produzione discorsiva di enunciati messi in relazione l'uno con l'altro per giustificare, per spiegare o per dimostrare fatti emergenti da una costruzione geometrica. Infatti, il caso ideale in cui è possibile affermare che lo studente ha costruito conoscenza, è quello in cui egli è in grado di accompagnare la costruzione geometrica dalla sua giustificazione concettuale, cioè dalla dimostrazione del fatto che la figura costruita è proprio quella richiesta oppure del fatto che la costruzione eseguita risolve il problema posto. Una stesura autonoma, intenzionale, di una tale produzione discorsiva è una competenza elevata anche per studenti di scuola secondaria superiore. A nostro avviso, la comprensione del discorso matematico implicato può tuttavia essere verificato anche indebolendo le ipotesi sul grado di intenzionalità richiesto; infatti, per poter affermare che la comprensione è avvenuta, è sufficiente che lo studente sia in grado di comprendere il contenuto della produzione discorsiva che accompagna la costruzione geometrica; non è necessario che tale produzione discorsiva sia stata prodotta da lui, autonomamente. Da queste considerazioni è nata l'esigenza di individuare un modo il più possibile oggettivo di verifica della comprensione di una produzione discorsiva che si presenta come giustificazione, descrizione o dimostrazione di una costruzione geometrica.

L'idea che sia possibile rendere misurabile il grado di comprensione di un testo ha una lunga tradizione, così come l'idea che il grado di correttezza del completamento di un testo *cloze* (cioè un testo in cui è stato cancellato un certo numero di parole seguendo un algoritmo prestabilito) possa fornire informazioni sulla misura della comprensione del testo da parte di un soggetto. Come evidenziano D'Amore e Fandiño Pinilla (2015), le ricerche in questo campo sono tante e molte di esse sono specifiche della matematica (citiamo a titolo esemplificativo Gagatsis, 1980, 1982, 1984, 1985, 1995; Gagatsis & Chaney, 1983; Kene, Byrne, & Hater, 1974).

Secondo D'Amore e Fandiño Pinilla (2015) si può affermare che "lo studente capisce un brano di un testo di matematica (…) se è in grado di 'chiudere' il brano che presenta cancellazioni, cioè scegliere con un certo qual successo le parole che sono state cancellate nel brano" (p. 31).

Come sottolineano gli Autori, la difficoltà maggiore consiste nel quantificare in maniera opportuna la comprensione, renderla cioè misurabile, oggettivarla. La formula matematica di comprensione costruita da loro è il frutto di un continuo meticoloso lavoro di confronto tra l'elaborazione teorica, lo studio analitico e critico di precedenti formule e i numerosi risultati euristici raccolti sul campo.

Riportiamo qui di seguito l'interpretazione della formula di comprensione.

> Sia dato un brano T che comprende n parole. Non si considerano formule né segni di punteggiatura.
> Il numero delle parole cancellate è Int(n/5) cioè la parte intera del numero razionale n/5.
> Delle parole cancellate fanno parte le seguenti categorie:
> c1) parole di lingua corrente non di carattere logico né tecnico (numero a);
> c2) parole tecniche della matematica (numero b);
> c3) parole di lingua a carattere logico (connettivi: non, e, o, implica, …; quantificatori: nessuno, alcuni, tutti, …; deduttivo: siccome, poiché, dimostra, …) (numero c).
> Dunque: $a + b + c = \mathrm{Int}(n/5)$.
> Notiamo che n, Int(n/5), a, b, c sono tutti numeri naturali.
> Sia:
> $m_T = a \times 0{,}1 + b \times 0{,}3 + c \times 0{,}4$;
> il numero razionale m_T si chiama "indice di difficoltà di T".
> Siano:
> a' le parole di tipo c1 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($a' \leq a$);
> b' le parole di tipo c2 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($b' \leq b$);
> c' le parole di tipo c3 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($c' \leq c$).
> Si consideri ora la formula:
> $r_{TS} = (a - a') \times 0{,}1 + (b - b') \times 0{,}3 + (c - c') \times 0{,}4$;
> il numero razionale r_{TS} si chiama "indice di comprensione di T da parte di S".
> Se $r_{TS} = 0$, si considera la comprensione del brano T da parte di S perfetta.
> Se $0 < r_{TS} < m_{T/2}$ si considera la comprensione del brano accettabile o positiva;
> se $m_{T/2} \leq r_{TS} \leq m_T$ si considera la comprensione del brano insufficiente o negativa.
> (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015, pp. 34–35)

Una delle caratteristiche che rende la formula di comprensione da noi scelta particolarmente adatta allo scopo con cui è stata usata in questa ricerca, è che essa è indipendente dalla lingua in cui è scritto il testo base dal quale viene ricavato il testo *cloze*. Infatti, a differenza di formule simili elaborate in precedenza (Gagatsis, 1980, 1982, 1984, 1985, 1995; Gagatsis & Chaney, 1983), i parametri di questa formula, che sono stati ricavati e successivamente raffinati in studi empirici prolungati e condotti in vari paesi (Italia, Svizzera, Colombia), attribuiscono un peso diverso alle parole cancellate, non in base alle loro caratteristiche grammaticali ma, come abbiamo mostrato, in base al loro ruolo nel linguaggio matematico: si distinguono parole comuni, parole che denotano oggetti o relazioni matematiche e parole di carattere logico.

3. Problema di ricerca

Per comprendere meglio la problematica dell'apprendimento in geometria è opportuno esaminare due nodi intorno ai quali essa si articola.

Il primo è di tipo relazionale ed è legato alla tensione espressa dalla relazione tra il modo di vedere iconico e non iconico e si basa sul fatto che, come già accennato, il modo di vedere non iconico, richiesto per l'apprendimento della geometria, non è spontaneo e necessita di un processo di insegnamento-apprendimento specifico. Inoltre, il modo di vedere iconico non può essere considerato propedeutico a quello non iconico; anzi, il primo è un ostacolo all'apprendimento del secondo in quanto i due modi di vedere si basano su assunzioni di fondo inconciliabili in un unico atto percettivo. Questo significa che sarebbe opportuno introdurre a scuola delle attività che favoriscano l'apprendimento del modo di vedere non iconico a partire dai livelli scolastici inferiori, cioè già dalla scuola primaria.

Il secondo nodo intorno al quale si articola la problematica dell'apprendimento della geometria, invece, è di natura semiotica: l'apprendimento in geometria richiede di solito il coordinamento di due registri semiotici distinti, che devono essere coordinati in parallelo (registro verbale e registro figurale) (D'Amore, 2015; Duval, 2005).

La problematica davanti alla quale ci troviamo è dunque duplice: come fare sì che gli alunni acquisiscano già in giovane età (durante gli ultimi anni della scuola primaria) la capacità di vedere le figure geometriche nel modo di vedere non iconico, tenendo contemporaneamente conto della sfida cognitiva dovuta alla necessità di coordinamento dei registri semiotici?

Un primo aspetto su cui è necessario riflettere riguarda la necessità di progettare attività appropriate all'educazione dei bambini della scuola primaria al modo di vedere non iconico. Pur essendo possibile pensare a tali attività senza fare ricorso alle costruzioni geometriche con riga e compasso (Duval, 2017, p. 72), è proprio questo tipo di figura che richiede per definizione che si adotti un modo di vedere non iconico. Infatti, le costruzioni con riga e compasso sono particolarmente adatte per attività di decostruzione dimensionale in quanto in esse le unità figurali delle figure 2-dimensionali possono emergere naturalmente come enti 1-dimensionali o 0-dimensionali, consentendo di stabilire una corrispondenza, attraverso l'operazione di designazione, tra le unità figurali e le corrispondenti unità rappresentative nel registro discorsivo. Per esempio, nel caso classicamente euclideo della costruzione del triangolo equilatero con riga e compasso, il modo di vedere non iconico (a causa della soggiacente decostruzione dimensionale), consente di vedere i vertici del triangolo come intersezioni degli enti geometrici ausiliari, rette e circonferenze, e di associarli al termine "punto di intersezione" nel registro discorsivo.

Tuttavia, è importante sottolineare che non è la costruzione con riga e compasso in sé a consentire di adottare il modo di vedere non iconico e di mettere in atto la decostruzione dimensionale. Infatti, una costruzione geometrica si configura dal punto di vista storico-epistemologico come un problema geometrico risolubile all'interno di un preciso quadro assiomatico, in cui essa ha "come giustificazione della sua correttezza un teorema che stabilisce le relazioni tra i vari elementi della configurazione utilizzata" (Mariotti, 1996, p. 265). Le costruzioni con riga e compasso possono, proprio in virtù di questa corrispondenza, essere usate come avvio alla decostruzione dimensionale, la cui presenza emerge dall'interazione tra la costruzione e il testo della relativa dimostrazione.

Nel lavoro di ricerca qui proposto le costruzioni geometriche vengono usate con uno scopo non strettamente aderente al loro significato epistemologico originario, ma tale uso trova giustificazione proprio nella, se pur complessa, corrispondenza tra soluzione pratica del problema (costruzione geometrica) e la sua soluzione teorica (il teorema che valida tale costruzione). Probabilmente non è un caso che, nel I libro degli *Elementi*, la costruzione del triangolo equilatero appare come prima proposizione, cioè primo teorema: un teorema la cui dimostrazione è data implicitamente dalle proprietà degli strumenti chiamati in causa nella costruzione. Dunque, l'impostazione da noi proposta, in cui la costruzione non è tanto il problema da risolvere e validare, quanto il primo passo nella costruzione di una dimostrazione, passo che presuppone la presenza di un modo di vedere non iconico, il quale si esprime tramite la capacità di decostruzione dimensionale della figura, non è una novità dell'attuale ricerca epistemologica. Questo uso delle costruzioni geometriche è però in ogni caso epistemologicamente giustificabile, basti pensare all'impostazione hilbertiana della geometria, in cui le dimostrazioni hanno uno status indipendente da eventuali rappresentazioni figurali (è sufficiente ricordare le famose parole attribuite a Hilbert da vari autori, secondo cui invece di parlare di punti, rette e piani, si sarebbe potuto parlare di tavoli, sedie e boccali di birra). Vedremo tuttavia più avanti che il nostro approccio è giustificabile anche dal punto di vista semio-cognitivo, seguendo la linea di Duval (2005).

Un secondo aspetto su cui è necessario riflettere, data la giovane età degli allievi che abbiamo deciso di coinvolgere nella ricerca, è quello dell'esigenza di creare un equilibrio tra la necessità di ridurre il più possibile l'impatto cognitivo dovuto alla necessità di coordinamento dei registri semiotici e l'esigenza di creare le condizioni che facciano sì che tale coordinamento si possa verificare, in quanto la sua presenza è indice della presenza del modo di vedere non iconico. Infatti, come è ben noto, soprattutto le conversioni tra diversi registri semiotici (Duval, 1993) ma anche i trattamenti (D'Amore, 2006), cioè i passaggi da una rappresentazione a un'altra all'interno dello stesso registro semiotico, possono essere causa di perdita (o di cambio) di senso e di conseguenza causa di mancata attribuzione di significato all'attività svolta. D'altro canto, però, secondo il paradosso di Duval (1993), solo attraverso l'uso di diversi registri semiotici il soggetto che apprende può arrivare a non confondere l'oggetto matematico, alla cui costruzione personale mira l'attività didattica, con le sue rappresentazioni semiotiche. Dunque, in generale il coordinamento tra registri semiotici è necessario all'apprendimento e andrebbe incoraggiato. D'altro canto però, tale coordinamento, che è richiesto già durante la fase della costruzione della figura geometrica, costituisce spesso una soglia importante per molti studenti delle scuole superiori e dunque lo sarebbe a maggior ragione per allievi della scuola primaria.

Pur essendo quanto appena detto vero, cioè che in generale il coordinamento di due registri semiotici è necessario all'apprendimento, è anche vero che non in tutti i casi in cui durante un'attività in geometria è presente il registro figurale, esso riveste lo stesso ruolo dal punto di vista semiotico. Duval (2005) distingue due situazioni che si possono presentare: (i) il registro figurale è solo di supporto al registro verbale, che può essere considerato autosufficiente (questo è il caso delle dimostrazioni tipiche della geometria euclidea) (Figura 3); (ii) il registro figurale è autosufficiente e il registro verbale funge solo da supporto (questo è il caso delle dimostrazioni cosiddette "per immagini") (Figura 4). A proposito del caso (i), Duval (2005) scrive infatti quanto segue:[1]

> Un ragionamento che utilizza definizioni e teoremi (che in alcuni casi si chiamano, in maniera impropria e meno teorica, "proprietà") è indipendente da qualsiasi visualizzazione e si può anche realizzare contro ogni visualizzazione. (…) Questo tipo di ragionamento, a differenza dell'argomentazione, dipende da un meccanismo discorsivo di sostituzione di alcune proposizioni da parte di altre, e non dal meccanismo generale e spontaneo di composizione cumulativa di proposizioni. (Duval, 2005, p. 43)

Inoltre:

> È sempre possibile proporre problemi nei quali le figure costituiscono il campo apparente del lavoro di ricerca e che servono da appoggio per i ragionamenti (…) in quel caso ci limitiamo al tipo di situazione (…) della dimostrazione di Euclide, dove la figura può essere solo una rappresentazione ausiliaria, e dove le corrispondenze non sono fatte a livello di ragionamento ma a livello dei termini che designano le unità figurali e a quello delle proposizioni. (Duval, 2005, p. 43)

Dunque, nel caso di una dimostrazione, in cui le proposizioni sono concatenate da un punto di vista sintattico, la rappresentazione figurale funge da appoggio alla dimostrazione, che di per sé potrebbe essere considerata autosufficiente.

[1] La traduzione in italiano è nostra.

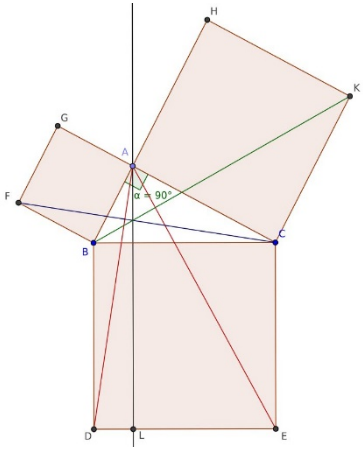


Figura 3. Esempio di costruzione geometrica (registro figurale) che funge da supporto alla dimostrazione del teorema di Pitagora, facendo ricorso al teorema di Euclide.

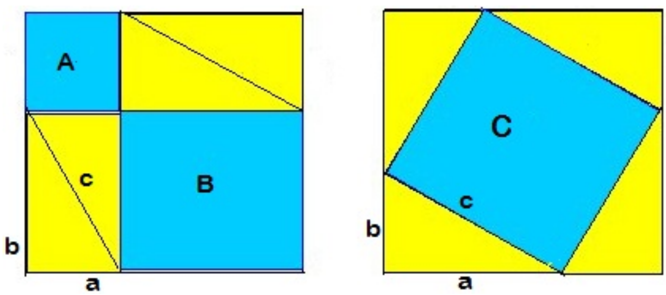


Figura 4. Esempio di dimostrazione per immagini (registro figurale) che fornisce una giustificazione del teorema di Pitagora sfruttando la scomposizione della superficie in poligoni equiestesi.

I casi in cui il registro figurale è autosufficiente presentano difficoltà minori per gli studenti, proprio perché la loro interpretazione si basa sulla sola percezione visiva che di solito non necessita di mediazioni verbali. Questo tipo di prove viene abitualmente proposto ai livelli scolastici inferiori (scuola primaria e scuola secondaria di primo grado) proprio a causa della sua evidenza, anche se è importante tenere presente che pure nelle dimostrazioni per immagini il "vedere" non è sempre immediato, ma potrebbe richiedere alcuni passaggi intermedi, esprimibili sempre nel registro figurale (Duval, 2005, p. 41). Per i livelli scolastici superiori si aderisce invece di solito alla tipologia di dimostrazione basata sul sistema assiomatico della geometria euclidea.

Nel caso particolare delle costruzioni geometriche che fungono da supporto alle dimostrazioni in geometria (secondo l'impostazione da noi scelta e discussa in precedenza), è necessario ribadire che la costruzione geometrica acquisisce significato solo attraverso il "testo esplicativo", in cui vengono esplicitate le inferenze logiche che legano i singoli passaggi della costruzione e conducono alla *necessità logica* del risultato. Sia in un'impostazione tradizionale dell'uso delle costruzioni con riga e compasso, sia in un'impostazione come quella scelta da noi per questa ricerca, vi sono sostanzialmente due fasi in cui si svolge l'attività ad esse connessa; prima fase: si esegue la costruzione con riga e compasso, seguendo le istruzioni fornite tramite un testo scritto; seconda fase: si dimostra la costruibilità della figura geometrica oppure si giustifica il fatto che la costruzione è effettivamente la soluzione del problema proposto. Durante entrambe le fasi è richiesto un coordinamento dei due registri semiotici, figurale e discorsivo, ma il modo di vedere non iconico, e dunque la capacità di decostruzione dimensionale, può emergere solo nella seconda fase. Infatti, è solo nella seconda fase che viene esplicitato il ragionamento che conduce alla necessità logica del risultato, mentre nella prima fase le relazioni tra gli enti geometrici rimangono implicite e la costruzione può essere eseguita senza dover perciò adottare un modo di vedere non iconico: è sufficiente comprendere le istruzioni ed eseguirle. Pur sottolineando l'importanza del coordinamento tra i registri semiotici nella seconda fase, abbiamo ritenuto opportuno individuare modalità di lavoro, pensate soprattutto per gli allievi della scuola primaria, che evitassero il coordinamento dei due registri semiotici durante la fase della costruzione, abbassando così il grado di difficoltà del compito e rendendolo accessibile in maniera autonoma al maggior numero di allievi possibile.

Un ultimo aspetto di cui abbiamo ritenuto necessario tenere conto è legato alla questione se il modo di vedere non iconico, in seguito ad attività in cui lo studente l'ha adottato, viene mantenuto spontaneamente anche in un contesto in cui esso non è espressamente richiesto. Questa è infatti la condizione necessaria affinché tale modo di vedere le figure geometriche possa essere usato in maniera effettiva nella risoluzione di problemi.

4. Domande di ricerca

Le domande di ricerca sono strettamente legate ai due principali nodi intorno ai quali si articola la problematica dell'apprendimento della geometria e possono essere formulate come segue:

1) *La somministrazione delle istruzioni per le costruzioni con riga e compasso senza ricorso al registro discorsivo riduce l'impatto cognitivo dovuto alla necessità di coordinare due registri semiotici (figurale e discorsivo) in allievi di giovane età?*
2) *Quali sono le potenzialità della coppia*
   "costruzione con riga e compasso - relativa dimostrazione"

nell'indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico?

3) *Il ricorso al modo di vedere non iconico è spontaneo negli allievi in contesti che non lo richiedono espressamente?*

Nell'attività di sperimentazione finalizzata alla raccolta dei dati erano coinvolte due classi, ma non sempre nelle attività legate a una domanda di ricerca erano coinvolte entrambe le classi e non sempre con le stesse modalità, come vedremo di seguito.

5. Le strategie di ricerca

La ricerca è stata svolta in una classe IV e in una classe V della scuola primaria, all'inizio dell'anno scolastico, per una durata di due ore in ogni classe. Si è trattato di due classi di un Istituto comprensivo della Provincia di Modena. Le classi erano composte da 20 alunni la IV e da 17 alunni la V, ma in entrambe le classi nel giorno dello svolgimento dell'attività erano assenti alcuni bambini e quindi alla sperimentazione hanno partecipato 17 alunni della IV e 14 alunni della V. In entrambe le classi il rapporto tra maschi e femmine era equilibrato; in IV uno degli alunni ha svolto l'attività affiancato dalla docente di sostegno.

L'obiettivo della ricerca consisteva nel far svolgere ai bambini un'attività che avrebbe dovuto indurli ad adottare un modo di vedere le figure geometriche non iconico, più precisamente il modo di vedere del costruttore. Gli alunni hanno eseguito la costruzione del triangolo equilatero con la riga e il compasso senza che fosse stato detto loro che stessero costruendo tale figura geometrica.

Al fine di verificare il supposto impatto negativo del coordinamento dei registri semiotici sullo svolgimento del compito di costruzione con riga e compasso in bambini di giovane età, e al fine di sperimentare un metodo che possa evitare tale impatto, abbiamo adottato per la fase iniziale due approcci differenti in IV e in V.

In IV la costruzione non richiedeva il coordinamento del registro discorsivo e del registro figurale durante la costruzione poiché ai bambini non è stato consegnato un testo con le istruzioni per la costruzione, ma è stato mostrato loro un video muto, escludendo dunque l'audio, in modo tale che non venisse spiegato che cosa stessero costruendo. L'attività avrebbe dovuto indurre i bambini a riconoscere la figura finale (il triangolo equilatero), adottando il modo di vedere del costruttore. Al fine di poter verificare tale riconoscimento, non abbiamo ritenuto sufficiente chiedere ai bambini quale figura geometrica avessero costruito poiché avrebbero potuto rispondere correttamente senza aver effettivamente adottato un modo di vedere non iconico (per esempio avrebbero potuto misurare la lunghezza dei lati o rispondere fidandosi semplicemente della percezione visiva). Abbiamo invece voluto indagare se tale modo di vedere fosse collegato alla costruzione eseguita; abbiamo cioè voluto verificare se i bambini sarebbero stati in grado di capire il ragionamento che dimostra che la figura costruita doveva essere *necessariamente* un triangolo equilatero. A tale scopo abbiamo realizzato un testo matematico scritto che riportasse per esteso la dimostrazione e abbiamo cancellato una parola ogni cinque,[2] in modo da creare un testo *cloze*, il cui completamento, in base alla formula di comprensione di un testo di matematica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015), avrebbe consentito di misurare in maniera oggettiva la comprensione della dimostrazione e quindi l'attribuzione di significato all'attività e, in ultima istanza, avrebbe consentito di verificare l'effettivo ricorso a un modo di vedere non iconico nei bambini. In effetti, come già evidenziato in precedenza, la costruzione geometrica acquisisce significato solo in funzione alla dimostrazione, a cui funge da supporto, poiché solo in quest'ultima sono presenti i passaggi logici che conducono alla necessità logica del risultato. L'attribuzione di significato alla costruzione geometrica è dunque possibile solo se si è contemporaneamente in grado di comprendere il testo della dimostrazione. D'altro canto, l'attribuzione di significato alla costruzione geometrica presuppone il ricorso a un modo di vedere non iconico, e più precisamente al modo di vedere del costruttore, poiché la necessità logica del risultato ("la figura finale è un triangolo equilatero") si basa sulle proprietà dei tracciati ausiliari, cioè sulle proprietà della circonferenza. I lati del triangolo equilatero emergono come raggi di due circonferenze aventi per ipotesi lo stesso raggio. La decostruzione dimensionale consente di individuare due dei vertici del triangolo come punti di intersezione di un lato del triangolo e due circonferenze aventi tale lato come raggio e il terzo vertice come uno dei punti di intersezione di queste due circonferenze.

A differenza dei bambini in IV, a quelli di V è stato somministrato un testo scritto con le indicazioni per la costruzione del triangolo equilatero, anche in questo caso, senza che venisse loro detto che cosa stessero costruendo. In questo modo si è voluto verificare, come già anticipato in precedenza, quanto la necessità di coordinare due registri semiotici incidesse sulla difficoltà di completamento delle costruzioni geometriche. I risultati delle costruzioni sono stati poi confrontati con quelli della classe IV, dove tale coordinamento di registri era stato evitato attraverso la proiezione del video.

Inoltre, a differenza di quanto fatto in IV, in V abbiamo chiesto ai bambini, prima di somministrare il testo *cloze* da completare, di dire quale figura geometrica avevano costruito e di motivare la loro risposta. Questa richiesta preliminare aveva lo scopo di verificare una prima attribuzione di significato da parte dei bambini all'attività appena svolta (riconoscimento della figura

---

[2] La scelta di cancellare una parola ogni cinque non è casuale; da un lato, per la soppressione di più di una parola ogni cinque, la riuscita dell'item diventa troppo dipendente dalla riuscita degli item vicini mentre, al contrario, non sembra esserci grande differenza nell'affidabilità della misurazione dell'abilità di "chiusura" del testo tra la cancellazione ogni cinque e la cancellazione ogni sette parole (Gagatsis, 1995, p. 143).

costruita), ma soprattutto quello di verificare le loro motivazioni *spontanee*, prima di procedere al completamento della dimostrazione vera e propria, proposta sotto forma di testo *cloze*.

Il testo dal quale è stato ricavato il *cloze* è stato costruito in maniera tale da riportare la dimostrazione del fatto che la figura costruita è un triangolo equilatero, tenendo conto dei seguenti due aspetti: la lunghezza del testo, che non doveva essere eccessiva; la vicinanza cognitiva al linguaggio dei bambini del linguaggio usato (evitare l'eccessivo ricorso a tecnicismi per loro inconsueti). Al testo così costruito è stata applicata la formula di comprensione, cancellando una parola ogni cinque, non tenendo conto di formule (rientrano tra le formule anche i nomi degli enti matematici espressi attraverso lettere, come per esempio "AC" nell'espressione "il segmento AC") e di segni di punteggiatura. Poiché in un test "di chiusura" come la formula di comprensione che stiamo considerando, la determinazione delle parole da cancellare è "regolare ed allo stesso tempo casuale, ogni categoria di parole può essere soppressa (verbi, nomi, aggettivi, articoli, avverbi ecc." (Gagatsis, 1995, p. 143) e questo sottolinea la neutralità della formula (e dei risultati con essa ottenuti) dalla specificità del testo iniziale.

Al termine del lavoro in V, dopo aver ritirato gli elaborati e aver ringraziato i bambini per la collaborazione, abbiamo avanzato una richiesta che aveva lo scopo di verificare se, sentendosi liberi da pressioni legate al test, avrebbero comunque fatto ricorso alla riga e al compasso per una costruzione identica successiva, mantenendo il modo di vedere non iconico anche in questo contesto.

5.1. Il protocollo della sperimentazione in IV primaria

Il protocollo della sperimentazione nella classe IV prevedeva le seguenti fasi:

- ripasso dei concetti e termini tecnici coinvolti nella sperimentazione;
- consegna agli allievi del materiale cartaceo predisposto per la costruzione con riga e compasso;
- proiezione di un video muto, cioè privo di audio, che mostra la costruzione con riga e compasso del triangolo equilatero;
- riproduzione della costruzione con riga e compasso da parte dei bambini;
- somministrazione di un testo matematico *cloze* costruito secondo i criteri della formula di comprensione di un testo di matematica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015), nel quale i bambini dovevano inserire le parole mancanti (o equisignificanti);
- ritiro degli elaborati.

Il video in cui veniva mostrata la costruzione geometrica del triangolo equilatero (https://www.youtube.com/watch?v=W5Uk4kvPT_c) è stato fatto vedere tre volte, la terza in seguito alla richiesta esplicita di un bambino.

La successiva somministrazione del testo *cloze* doveva indurre i bambini a seguire un ragionamento che portasse a una giustificazione logica del fatto che la figura ottenuta è un triangolo equilatero. Esso aveva dunque lo scopo di verificare se, e in quale misura, i bambini sarebbero stati in grado di comprendere la dimostrazione del fatto che il triangolo da loro costruito è *necessariamente* un triangolo equilatero, ricorrendo al modo di vedere del costruttore.

Il ricorso alla formula di comprensione, e dunque al testo *cloze*, si è basato sui seguenti presupposti: (1) la comprensione del ragionamento nel testo *cloze* è necessaria per il suo completamento; (2) la correttezza del completamento è un indice della comprensione del testo dimostrativo, che può essere misurata in maniera oggettiva tramite la formula di comprensione; (3) la comprensione del testo dimostrativo è necessaria per l'attribuzione di significato alla costruzione geometrica con riga e compasso.

Nel testo della classe IV si è scelto di dividere il testo in due parti e di applicare il conteggio e la cancellazione delle parole su ciascuna delle due parti separatamente. Questa scelta è stata dettata dal fatto che un testo di questo tipo, che richiede più passaggi inferenziali, poteva essere troppo difficile per alunni così giovani e inesperti. Garantire la possibilità di una ripresa corretta del discorso a metà del testo, evitando che si presentasse un'interruzione all'inizio di una frase cruciale del discorso, avrebbe a nostro avviso diminuito ragionevolmente tale grado di difficoltà.

Il testo completo del *cloze* è riportato qui di seguito; le parole evidenziate in grassetto sono le parole che, nel testo consegnato ai bambini, erano state cancellate, dunque che i bambini dovevano individuare. Precisiamo che secondo la formula di comprensione di D'Amore e Fandiño Pinilla (2015) sono considerate corrette anche parole sinonimo di quella cancellata.

> Il segmento AB e il **segmento** AC hanno la stessa lunghezza **perché** sono raggi della stessa **circonferenza**. Anche i segmenti AB e BC **sono** raggi della stessa circonferenza.
> Questo significa che AC e BC hanno **la** stessa lunghezza e che **sono** entrambi lunghi quanto il **segmento** AB. Possiamo concludere che il **triangolo** ABC ha tre lati della **stessa** lunghezza e quindi è **un** triangolo equilatero.

5.2. Il protocollo della sperimentazione in V primaria

Le fasi del protocollo di sperimentazione in V primaria erano le seguenti:

- ripasso dei concetti e termini tecnici coinvolti nella sperimentazione;
- consegna delle istruzioni scritte per la costruzione con riga e compasso del triangolo equilatero;
- costruzione del triangolo equilatero da parte dei bambini;
- verifica del controllo semantico sul compito svolto e delle motivazioni spontanee (richiesta di giustificazione);

- somministrazione di un testo matematico *cloze* costruito secondo i criteri della formula di comprensione di un testo matematico (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015), nel quale i bambini dovevano inserire delle parole mancanti;
- completamento del *cloze* da parte dei bambini;
- ritiro degli elaborati;
- dichiarazione del termine della sperimentazione;
- richiesta rivolta ai bambini di disegnare un triangolo equilatero senza dire con quali strumenti, cioè lasciando loro piena libertà.

Riportiamo qui il testo delle istruzioni che sono state consegnate ai bambini per la costruzione con riga e compasso; nella sua formulazione è stata posta particolare cura nell'uso di un linguaggio il più possibile vicino all'esperienza dei bambini.

> Esegui la costruzione con riga e compasso seguendo le istruzioni.
> Prendi due punti B e C a piacere e disegna il segmento BC con il colore rosso. Disegna la circonferenza con centro in B e raggio BC. Disegna poi la circonferenza con centro in C e raggio CB. Chiama A uno dei due punti di intersezione delle due circonferenze.
> Disegna con il colore rosso i segmenti AC e AB.

La verifica del controllo semantico sul compito svolto e la richiesta di giustificazione erano formulate nel seguente modo:

> Il triangolo ABC disegnato in rosso è un triangolo particolare. Di che tipo di triangolo si tratta?
> ……………………………………………
> Spiega perché.
> Il triangolo ABC è ……………………….. perché…………………………

Come già anticipato, lo scopo della richiesta di giustificazione era quello di verificare una prima attribuzione di significato all'attività svolta da parte dei bambini, ma soprattutto di far emergere le loro motivazioni *spontanee*.

Come anche nel testo somministrato in IV, la successiva somministrazione del testo *cloze* aveva lo scopo di indurre i bambini a seguire un ragionamento che portasse a una giustificazione logica del fatto che la figura ottenuta è un triangolo equilatero.

Il testo completo somministrato ai bambini di V è riportato qui di seguito; le parole evidenziate in grassetto sono le parole che, nel testo consegnato ai bambini, erano state cancellate, dunque che i bambini dovevano individuare.

> Il segmento AB e il **segmento** AC sono raggi della stessa **circonferenza** e quindi hanno la **stessa** lunghezza. Anche i segmenti AB **e** BC sono raggi della stessa **circonferenza**. Se il segmento AC è **lungo** quanto il segmento AB e questo **segmento** a sua volta è **lungo** quanto il segmento BC, allora **i** segmenti AC e BC hanno la **stessa** lunghezza e sono entrambi **lunghi** quanto il segmento AB. Dato

che il triangolo ABC ha tre **lati** uguali, possiamo dire che **è** un triangolo equilatero.

Al termine del lavoro, dopo aver ritirato gli elaborati e aver ringraziato i bambini per la collaborazione e aver dichiarato che il lavoro era terminato, abbiamo chiesto loro di prendere un foglio e di disegnare un triangolo equilatero. Questa richiesta aveva lo scopo di verificare se i bambini, sentendosi liberi da pressioni legate al test, avrebbero comunque fatto ricorso alla riga e al compasso, mantenendo il modo di vedere non iconico anche in questo contesto, oppure se si sarebbero basati sul modo di vedere iconico, cercando di disegnare a mano libera un triangolo equilatero, senza fare ricorso agli strumenti.

6. Disegno di ricerca e metodi di ricerca

Secondo Denzin e Lincoln un disegno di ricerca è "un insieme flessibile di linee guida che connettono i paradigmi teorici, prima, alle strategie di ricerca e, poi, ai metodi di raccolta del materiale empirico" (Denzin & Lincoln, 2011, cit. in Iori, 2015, p. 126), mentre una strategia di ricerca costituisce un insieme di assunzioni e pratiche che consentono al ricercatore di collegare il paradigma di ricerca al piano della raccolta empirica dei dati.

Il paradigma teorico all'interno del quale si colloca la nostra ricerca è quello pragmatista (D'Amore, 2001; D'Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017). In relazione al quadro teorico di riferimento, l'impostazione pragmatista può essere confermata da almeno due aspetti. Il primo aspetto riguarda il fatto che Duval assume che i diversi modi di vedere da lui teorizzati non sono abilità presenti nell'individuo e che il docente deve "risvegliare" ma che essi devono essere acquisiti *ex novo* dallo studente e che richiedono una didattica specifica. Il secondo aspetto riguarda invece la formula di comprensione di un testo di matematica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015); tale formula, nonostante renda oggettivamente misurabile la comprensione di un testo, si basa non su una presunta invarianza (e quindi esistenza oggettiva) degli oggetti matematici ma sulla invarianza relazionale che li definisce implicitamente e consente di verificare la comprensione del loro uso in un dato contesto, espresso attraverso il testo su cui viene applicata la formula di comprensione.

Le strategie di ricerca da noi adottate sono state esposte nel capitolo precedente. Per quanto riguarda gli approcci all'analisi dei dati, ci siamo serviti sia di un approccio di tipo comparativo (vengono comparati dati provenienti da due campioni qualitativamente diversi per individuare le differenze quantitative relative a un dato parametro) sia di un approccio di tipo inferenziale (da dati quantitativi ricavati dal campione si traggono generalizzazioni qualitative, oppure si verificano ipotesi, relative alla popolazione) (Viganò, 1999, p. 91); precisiamo inoltre che, anche nel caso di un approccio comparativo ai dati, nella fase conclusiva, cioè quella dell'interpretazione, è stato adottato un approccio inferenziale.

I metodi di ricerca, pur essendo prevalentemente di carattere quantitativo, configurano un quadro di ricerca complesso, in cui sono presenti sia un modello misto sia un metodo misto (Johnson & Onwuegbuzie, 2004, cit. in Iori, 2015, p. 127). Infatti, abbiamo sia una combinazione di metodi quantitativi con metodi qualitativi in una stessa fase (ricerca a modello misto), sia una convivenza tra fasi a metodo qualitativo e fasi a metodo quantitativo tra loro separate (ricerca a metodo misto). Adattando il modello di Johnson e Onwuegbuzie (2004) alla ricerca da noi condotta, chiameremo di seguito *metodo quantitativo con modello misto nidificato* un quadro metodologico di ricerca prevalentemente quantitativo in cui sono presenti fasi a modello misto nelle quali si mescolano analisi quantitative e qualitative; useremo invece il termine "approccio" nel distinguere: (a) l'approccio comparativo ai dati da quello inferenziale; (b) i metodi adottati in un singolo atto di raccolta dati, che può essere o qualitativo o quantitativo.

Distinguiamo le strategie e i metodi di ricerca in base alle domande di ricerca.

1) *La somministrazione delle istruzioni per le costruzioni con riga e compasso senza ricorso al registro discorsivo (tramite la somministrazione di un video muto) riduce l'impatto cognitivo dovuto alla necessità di coordinare due registri semiotici (figurale e discorsivo) in particolare modo in allievi di giovane età?*

Per rispondere a questa domanda di ricerca abbiamo adottato un approccio comparativo e successivamente inferenziale a modello misto. Dopo aver diversificato le modalità di somministrazione delle istruzioni nella classe IV e nella classe V, sono stati valutati i risultati delle costruzioni in termini di tempo impiegato per la costruzione (approccio quantitativo) e autonomia degli allievi nel completamento del compito, verificata tramite il numero di richieste di aiuto rivolte alla ricercatrice (approccio quantitativo) e tramite una valutazione complessiva dell'esattezza e dell'accuratezza della costruzione (approccio qualitativo). Successivamente, i risultati delle due classi sono stati confrontati tra loro (approccio comparativo), confrontati con le ipotesi di risposta e usati per trarre conclusioni relativamente alla domanda di ricerca (approccio inferenziale). La scelta di confrontare due campioni qualitativamente diversi (una classe IV e una classe V) è dovuta al fatto che ci è sembrato opportuno testare l'eventuale beneficio tratto da uno dei due metodi di somministrazione delle istruzioni (quello tramite video risultava a nostro avviso già in partenza più immediato e quindi più avvantaggiato) su un campione che non fosse equivalente, ma che avesse un leggero svantaggio cognitivo dovuto all'età. In questo modo l'eventuale vantaggio derivante dal metodo di somministrazione tramite il video avrebbe consentito di trarre conclusioni più significative sul beneficio che si può ottenere con esso.

2) *Quali sono le potenzialità della coppia*

"costruzione con riga e compasso - relativa dimostrazione" nell'indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico?

Per rispondere a questa domanda di ricerca abbiamo adottato un approccio inferenziale puramente quantitativo in IV e un approccio inferenziale a metodo quantitativo con modello misto nidificato in V.

Complessivamente (considerando l'attività in IV *e* in V) l'approccio di ricerca alla seconda domanda di ricerca è stato dunque di tipo inferenziale a metodo quantitativo con modello misto nidificato.

Il punto di partenza comune per entrambe le classi era costituito dal fatto che gli alunni hanno eseguito la costruzione del triangolo equilatero con la riga e il compasso senza che fosse stato detto loro che stavano costruendo tale figura geometrica. In IV si è trattato tra l'altro della prima volta che i bambini stavano usando il compasso.

Agli allievi di IV è stato somministrato un testo *cloze* tratto dal testo dalla dimostrazione del fatto che la figura costruita in precedenza è un triangolo equilatero. L'attività che coinvolgeva la coppia:

"costruzione riga e compasso - relativa dimostrazione"

avrebbe dovuto indurre i bambini ad adottare un modo di vedere le figure geometriche non iconico, la cui presenza durante l'attività sarebbe stata rilevata dal grado di comprensione del testo *cloze*, determinato tramite l'indice di comprensione, applicando la formula di comprensione (approccio quantitativo tramite gli indici di comprensione). Il calcolo della percentuale di bambini che hanno ottenuto un indice di comprensione positivo (approccio quantitativo), avrebbe consentito di stabilire quale percentuale di allievi ha fatto ricorso al modo di vedere non iconico durante l'attività di completamento del testo *cloze* (approccio quantitativo).

Successivamente, i risultati ottenuti sarebbero stati confrontati con le ipotesi di risposta e usati per trarre conclusioni relativamente alla domanda di ricerca (approccio inferenziale).

Un aspetto che riteniamo importante discutere qui è legato all'efficacia della formula di comprensione nella misurazione del grado di comprensione della dimostrazione. In prima battuta possiamo affermare che la formula di comprensione di un testo di matematica è un valido strumento di rilevazione del grado di comprensione del testo da noi usato poiché, trattandosi del testo di una dimostrazione, esso è non solo un testo *di* matematica, ma *il* testo matematico per eccellenza, e quindi per definizione sottoponibile a un esame con la formula; inoltre, il peso elevato attribuito al riconoscimento delle parole a carattere logico rende possibile una distinzione sufficientemente accurata tra coloro che comprendono la dimostrazione e coloro che non la comprendono. Ci si potrebbe tuttavia chiedere se e perché il grado di comprensione di un testo *cloze* possa essere ritenuto significativo dal punto di vista cognitivo, per esempio rispetto alla semplice lettura del testo della dimostrazione. A nostro avviso il completamento di un testo *cloze* costringe il soggetto a cercare di allineare due visioni dello stesso oggetto matematico: quella implicita nel testo e quella propria del soggetto; questo allineamento non può tuttavia avvenire se si agisce in maniera passiva; esso deve emergere da una dialettica tra le due visioni, ottenuta tramite un'attività *intenzionale* di designazione degli elementi coinvolti, da parte del soggetto, con certi termini scelti al posto di altri, in accordo con la sua propria visione. Ciò che viene dunque espresso attraverso il grado di comprensione del testo *cloze* è in realtà il grado di allineamento tra queste due visioni. Supposto che ciò che si desidera ottenere sia la comprensione di un dato testo (nel nostro caso quello della dimostrazione), è proprio la qualità del completamento del *cloze* da esso ricavato che consente di misurare tale comprensione.

A differenza di quanto fatto in IV, l'attività relativa alla seconda domanda di ricerca in V si è svolta in due fasi. Durante la prima fase abbiamo rivolto agli allievi una richiesta di attribuzione di significato e di giustificazione dell'attività svolta (dovevano dire quale figura pensavano di aver disegnato e perché), calcolando successivamente la percentuale di allievi che ha riconosciuto la figura costruita come triangolo equilatero (approccio quantitativo) e valutando gli elementi argomentativi nella giustificazione dell'affermazione attraverso un approccio qualitativo.

La seconda fase è stata condotta con un approccio esclusivamente quantitativo ed era analoga a quella condotta in IV.

Anche per questa domanda di ricerca, i risultati ottenuti sono stati confrontati con le ipotesi di risposta e usati per trarre conclusioni relativamente alla domanda di ricerca (approccio inferenziale).

3) *Il ricorso al modo di vedere non iconico è spontaneo negli allievi in contesti che non lo richiedono espressamente?*

Per rispondere all'ultima domanda di ricerca abbiamo adottato un approccio inferenziale con metodo quantitativo. Nell'attività di raccolta dati relativa a questa domanda è stata coinvolta solo la classe V. In un contesto diverso da quello precedente, ai bambini è stato chiesto di rispondere a una richiesta che avrebbe lasciato loro la scelta di ricorrere a un modo di vedere iconico o non iconico (si trattava di una richiesta di lasciare alla persona che ha condotto la sperimentazione un regalo consistente nel disegno di un triangolo equilatero). Successivamente è stata calcolata la percentuale di bambini che ha risposto alla richiesta eseguendo una costruzione con la riga e il compasso invece di effettuare un disegno a mano libera.

Anche in questo caso, i risultati ottenuti sono stati confrontati con le ipotesi di risposta e usati per trarre conclusioni relativamente alla domanda di ricerca (approccio inferenziale).

Complessivamente la strategia di ricerca può essere riassunta nel seguente schema (Tabella 3).

Tabella 3
Schema riassuntivo dei metodi di ricerca

<table>
<tr><td></td><td colspan="6">Domanda di ricerca</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Domanda di ricerca n. 1
Approccio comparativo e successivamente inferenziale con modello misto</td><td colspan="2">Domanda di ricerca n. 2
Approccio inferenziale con metodo quantitativo con modello misto nidificato</td><td>Domanda di ricerca n. 3
Approccio inferenziale con metodo quantitativo</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Fase delle attività di ricerca</td><td colspan="3">Fase 1
Raccolta dati con metodo misto
(dopo diversificazione delle modalità di istruzione per la costruzione tra IV e V)</td><td colspan="2">Fase 1
Raccolta dati con metodo quantitativo a modello misto nidificato</td><td>Fase 1
Raccolta dati con metodo quantitativo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Classi IV e V</td><td>Classe IV</td><td>Classe V</td><td>Classe V</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Metodo quantitativo
(tempi di esecuzione)</td><td colspan="2">Metodo misto
(autonomia di esecuzione)</td><td rowspan="2">Metodo quantitativo
(indici di comprensione)</td><td>Fase 1.1
Metodo misto
[numero di alunni che hanno riconosciuto la figura (quant.) + valutazione elementi di giustificazione (qual.)]</td><td rowspan="2">Metodo quantitativo
(percentuale allievi che usano spontaneamente riga e compasso)</td></tr>
<tr><td>Metodo quantitativo
(numero richieste d'aiuto rivolte alla ricercatrice)</td><td>Metodo qualitativo
(correttezza e accuratezza complessiva della costruzione)</td><td>Fase 1.2
Metodo quantitativo
(indici di comprensione)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 2
Interpretazione dati per le singole classi</td><td colspan="2" rowspan="2">Fase 2
Interpretazione dati</td><td rowspan="2">Fase 2
Interpretazione dati</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 3
Approccio comparativo tra i dati delle due classi</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 4
Approccio inferenziale in riferimento all'ipotesi di risposta e alla domanda di ricerca</td><td colspan="2">Fase 3
Approccio inferenziale in riferimento all'ipotesi di risposta e alla domanda di ricerca</td><td>Fase 3
Approccio inferenziale in riferimento all'ipotesi di risposta e alla domanda di ricerca</td></tr>
</table>

7. Ipotesi di risposta

La somministrazione delle istruzioni per le costruzioni con riga e compasso tramite la proiezione di un video avrebbe dovuto offrire a nostro avviso un vantaggio significativo soprattutto ad allievi molto giovani e inesperti come quelli della scuola primaria. La scelta di confrontare due campioni qualitativamente non equivalenti (una classe IV e una classe V) doveva rendere il confronto tra le modalità di somministrazione più equilibrato ma soprattutto, nel caso di un vantaggio significativo a favore della somministrazione tramite il video, avrebbe potuto mostrare che le costruzioni con riga e compasso sono cognitivamente accessibili anche a bambini di età molto giovane (classe IV), a patto che si adottino alcuni accorgimenti. Le nostre attese erano di un netto vantaggio in termini di tempo e di qualità di esecuzione della costruzione nel caso del metodo di somministrazione tramite il video muto. Inoltre ritenevamo che la coppia:

"costruzione riga e compasso - relativa dimostrazione"

fosse in grado di indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico e che l'effettiva presenza di questo modo di vedere fosse presupposto per la comprensione del testo *cloze* (e quindi per il suo completamento). Ci attendevamo una percentuale di successi (indice di comprensione positivo) per il 50% del campione in V e una percentuale minore in IV. Ritenevamo invece poco probabile che durante la richiesta di giustificazione prima della somministrazione del *cloze* in V, i bambini facessero riferimento alla costruzione geometrica per giustificare il riconoscimento della figura riconosciuta. Abbiamo supposto che avrebbero risposto basandosi sull'evidenza oppure su aspetti metrici, ma che non avrebbero adottato una decostruzione dimensionale e quindi il modo di vedere non iconico.

Avevamo supposto che il modo di vedere non iconico non fosse spontaneo anche in allievi che avessero seguito un'attività finalizzata alla sua acquisizione e che essi non lo avrebbero adottato spontaneamente in un contesto che non lo richiedesse espressamente. Avevamo ritenuto che solo una percentuale bassa di allievi (e comunque non superiore alla percentuale che ha ottenuto un indice di comprensione positivo) potesse adottare comunque il modo di vedere non iconico fuori dal contesto in cui lo ha sperimentato.

8. Risultati oggettivi della ricerca

In IV tutti i bambini sono riusciti a riprodurre la costruzione con riga e compasso senza particolari difficoltà. Solo un bambino ha chiesto aiuto; il tempo medio di esecuzione, compresa la proiezione del video, è stato di circa 6 minuti e la qualità delle costruzioni è buona, cioè gli elementi riportati nel video sono tutti presenti e le relazioni tra gli enti geometrici coinvolti sono riprodotte correttamente.

Di seguito (Figure 6.1–6.3) riportiamo alcuni esempi di tali costruzioni.

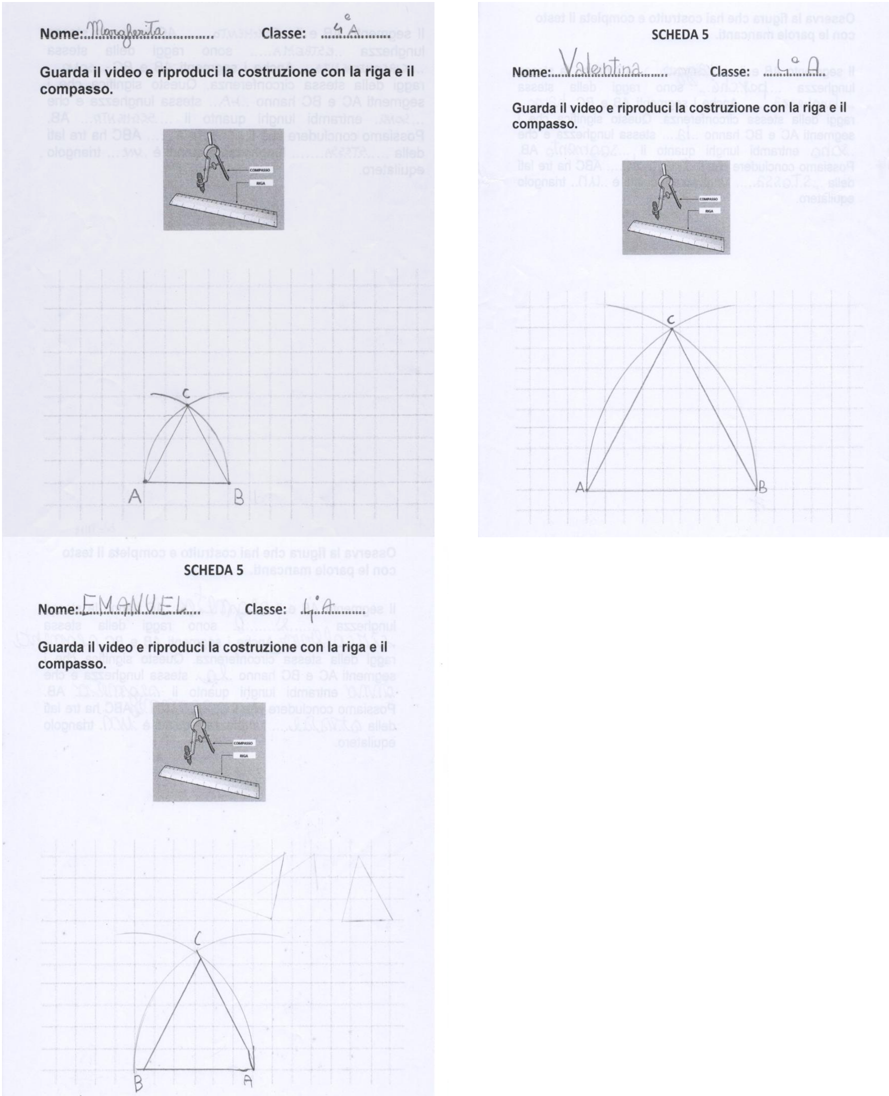
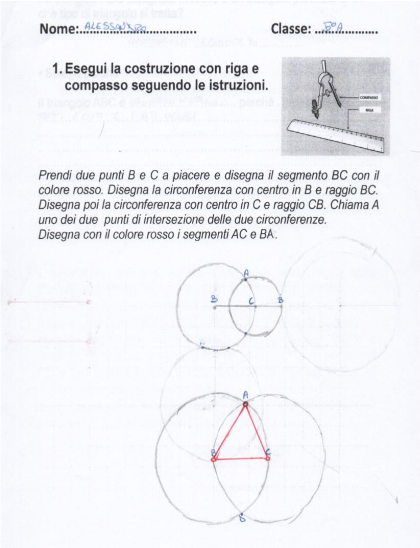
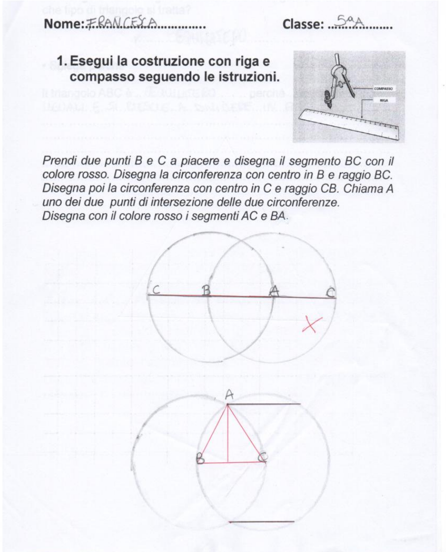


Figure 6.1–6.3. Alcuni esempi delle costruzioni eseguite dai bambini di IV.

I bambini di V, che hanno eseguito la costruzione con riga e compasso seguendo le istruzioni scritte, hanno incontrato difficoltà nella comprensione delle istruzioni; circa la metà ha chiesto almeno una volta l'aiuto della ricercatrice ed è riuscito a completare la costruzione solo dopo alcuni tentativi. Il tempo medio per la costruzione è stato di circa 15 minuti e la qualità delle costruzioni è relativamente bassa per circa un terzo degli allievi, poiché nelle loro costruzioni le relazioni tra gli enti coinvolti sono emerse solo in seguito alla mediazione della ricercatrice e in molte di esse sono stati introdotti elementi non presenti nelle istruzioni. Le immagini qui di seguito riportate

(Figure 7.1–7.3) mostrano alcuni esempi delle costruzioni eseguite dai bambini di V.





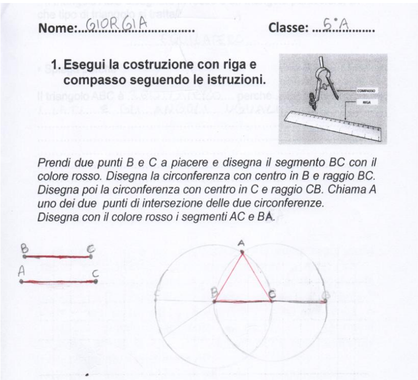
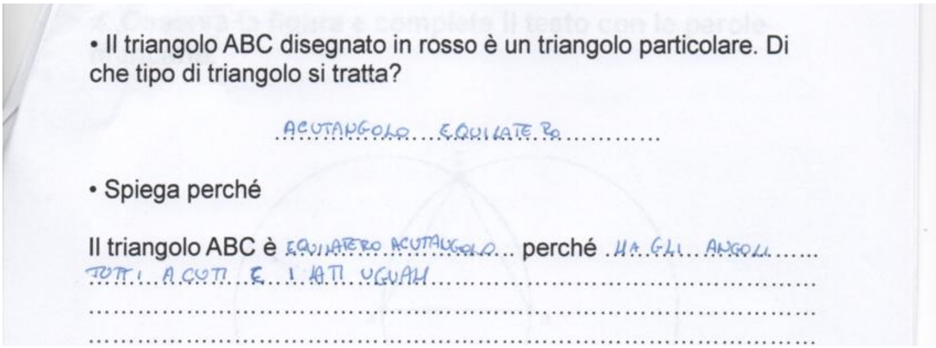


Figure 7.1–7.3. Alcuni esempi delle costruzioni eseguite dai bambini di V.

Nella fase relativa alla richiesta di attribuzione di significato all'attività svolta con riga e compasso, l'85% degli allievi (ricordiamo che erano coinvolti solo i bambini di V) ha riconosciuto di aver costruito un triangolo equilatero; alcuni di loro hanno aggiunto ulteriori caratteristiche, per esempio il fatto che si tratta di un "triangolo acutangolo" oppure che può essere diviso in due parti "uguali" o che ha gli angoli "uguali". Nella giustificazione nessun allievo ha fatto riferimento alla proprietà del triangolo costruito emergenti dalle proprietà delle circonferenze.

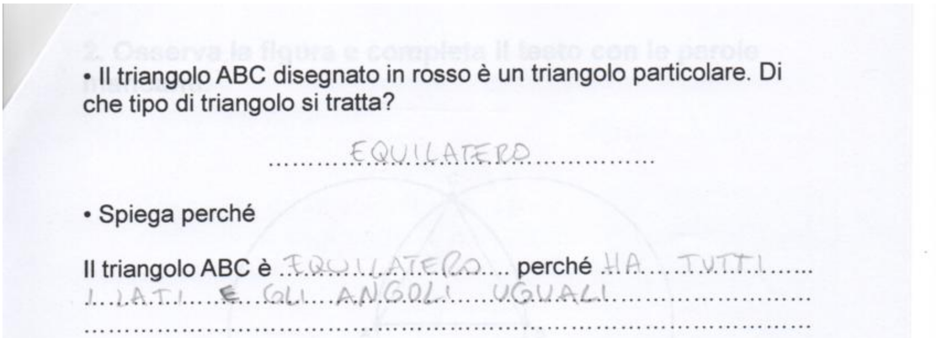
Le immagini riportate di seguito (Figure 8.1–8.3) mostrano alcune schede completate dai bambini.


• Il triangolo ABC disegnato in rosso è un triangolo particolare. Di che tipo di triangolo si tratta?

ACUTANGOLO EQUILATERO

• Spiega perché

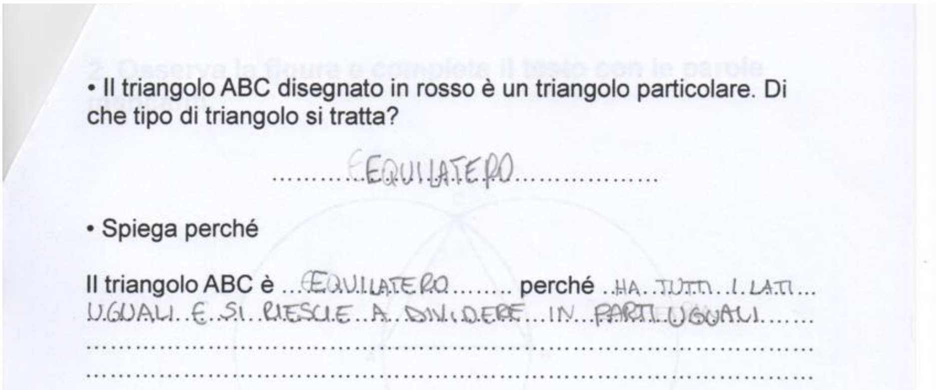
Il triangolo ABC è EQUILATERO ACUTANGOLO perché HA GLI ANGOLI TUTTI ACUTI E I LATI UGUALI


• Il triangolo ABC disegnato in rosso è un triangolo particolare. Di che tipo di triangolo si tratta?

EQUILATERO

• Spiega perché

Il triangolo ABC è EQUILATERO perché HA TUTTI I LATI E GLI ANGOLI UGUALI


• Il triangolo ABC disegnato in rosso è un triangolo particolare. Di che tipo di triangolo si tratta?

EQUILATERO

• Spiega perché

Il triangolo ABC è EQUILATERO perché HA TUTTI I LATI UGUALI E SI RIESCE A DIVIDERE IN PARTI UGUALI

Figure 8.1–8.3. Alcuni esempi delle giustificazioni fornite dai bambini.

Nel testo *cloze* proposto in IV le parole cancellate possono essere classificate come segue:

- parole di tipo a: *sono* (2 volte), *la*, *stessa*, *un*;
- parole di tipo b: *segmento* (2 volte), *circonferenza*, *triangolo*;
- parole di tipo c: *perché*.

L'indice di difficoltà del testo può dunque essere calcolato come segue:

- $m_T = a \times 0{,}1 + b \times 0{,}3 + c \times 0{,}4$
- $a = 5$; $b = 4$; $c = 1$

- $m_T = 5 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}4 = 0{,}5 + 1{,}2 + 0{,}4 = 2{,}1$.

I risultati ottenuti nella classe IV sono riassunti in Tabella 4.

Tabella 4
Risultati dell'analisi del test di comprensione della classe IV

Risultati ottenuti	Punteggi r_{TS} ottenuti
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione negativa ($r_{TS} \geq 1{,}05$): 6	1,2; 1,8; 1,4; 1,5; 1,1; 1,1
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione positiva ($r_{TS} < 1{,}05$): 11	1,0; 1,0; 0,6; 0,4; 0,6; 0,6; 1,0; 0,9; 1,0; 1,0; 1,0
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione perfetta ($r_{TS} = 0$): 0	

Nel testo *cloze* proposto in V le parole cancellate possono essere classificate come segue:

- parole di tipo a: *stessa* (2 volte), *lungo* (2 volte), *i*, *lunghi*;
- parole di tipo b: *segmento* (2 volte), *lati*, *circonferenza* (2 volte);
- parole di tipo c: *e*, *che*, *è*.

Dunque, l'indice di difficoltà del testo di matematica somministrato in V può essere calcolato come segue:

- $m_T = a \times 0{,}1 + b \times 0{,}3 + c \times 0{,}4$
- $a = 6$; $b = 5$; $c = 3$
- $m_T = 6 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}4 = 0{,}6 + 1{,}5 + 1{,}2 = 3{,}3$.

I risultati ottenuti nella classe V sono riassunti in Tabella 5.

Tabella 5.
Risultati dell'analisi del test di comprensione della classe V

Risultati ottenuti	Punteggi r_{TS} ottenuti
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione negativa ($r_{TS} \geq 1{,}65$): 2	2,3; 2,2
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione positiva ($r_{TS} < 1{,}65$): 12	0,7; 0,9; 0,4; 1,1; 0,4; 1,1; 0,7; 0,6; 1,0; 0,9; 0,7; 0,5
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione perfetta ($r_{TS} = 0$): 0	

La richiesta finale, dopo aver dichiarato terminata l'attività in V, di prendere un foglio e di disegnare un triangolo equilatero da regalare, come ricordo, alla persona che ha condotto la sperimentazione, è stata eseguita da tutti i bambini e circa metà di loro ha fatto ricorso alla riga e al compasso mentre l'altra metà ha fatto un disegno a mano libera.

9. Discussione dei risultati

Il confronto dei risultati ottenuti in IV e in V in riferimento alla costruzione con riga e compasso mostra che la somministrazione delle istruzioni attraverso la proiezione di un video muto, evitando dunque il coordinamento di due registri semiotici, facilita in maniera significativa gli allievi, consentendo di concludere l'attività autonomamente e in maniera soddisfacente. La facilitazione emerge chiaramente sia dai tempi di esecuzione (dimezzati in IV rispetto a quelli in V), sia dal grado di accuratezza delle costruzioni, sia dalla correttezza delle relazioni tra gli enti geometrici coinvolti.

Analizzando le costruzioni dei bambini soprattutto in V è emerso che molti di loro hanno inserito nella costruzione elementi la cui presenza non emerge dal testo delle istruzioni. L'aggiunta di queste informazioni può essere interpretata come il frutto di una possibile clausola del contratto didattico (Brousseau, 1980, 1986; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010; Narváez Ortiz, 2017), secondo la quale la maestra è tanto più soddisfatta della prestazione di un allievo quante più cose egli sa dire o fare, ma può essere interpretata anche come un tentativo di superare la tensione derivante dal disagio dovuto alla difficoltà di comprensione del compito da svolgere.

L'elevata percentuale di allievi di V che ha riconosciuto di aver costruito un triangolo equilatero (85%) è un indice del fatto che i bambini hanno attribuito un significato all'attività svolta. Il fatto che nella richiesta di giustificazione essi abbiano fatto riferimento ad aspetti metrici (per esempio riferimenti all'uguaglianza degli angoli oppure al fatto che il triangolo "può essere diviso in due parti uguali") per motivare il fatto che si tratti di un triangolo equilatero e il fatto che nessuno di loro abbia fatto riferimento alle proprietà degli enti geometrici coinvolti nella costruzione (cioè ai raggi delle circonferenze) mostra che il modo di vedere non iconico non è presente in questa fase del lavoro. Evidentemente non ci aspettavamo che i bambini fornissero una giustificazione logica del fatto di aver riconosciuto la figura costruita come triangolo equilatero; le loro giustificazioni spontanee si basavano infatti esclusivamente sull'evidenza, indotta dal modo di vedere iconico, messa in relazione con le nozioni acquisite a scuola relativamente ai triangoli equilateri. Sembra che la figura costruita appaia ai bambini su un piano diverso rispetto ai tracciati ausiliari che l'hanno fatta emergere ed è proprio il modo di vedere iconico che impone questa separazione tra la figura ottenuta e i tracciati costruiti per farla emergere. Dunque, il modo di vedere iconico vanifica l'efficacia cognitiva che le costruzioni geometriche possiedono in virtù del fatto che incorporano in maniera costruttiva la definizione di un ente geometrico oppure la risoluzione di un problema. Questo aspetto sembra confermare inoltre il fatto che il registro figurale non sia autosufficiente e che le costruzioni con riga e compasso di per sé non sono in grado di indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico.

Dai dati mostrati in Tabella 4 è possibile desumere che la comprensione del testo di matematica da parte degli alunni della classe IV è positiva (dunque sufficiente) per circa il 65% della classe ed è negativa (dunque insufficiente) per la restante parte degli alunni. Dalla Tabella 5 si desume che l'attività svolta in V ha prodotto esiti migliori rispetto a quella svolta in IV: 85% degli alunni ha ottenuto un livello di comprensione positivo e solo il 15% degli alunni la comprensione è stata negativa. Dato che il completamento del testo *cloze* doveva fornire informazioni sull'acquisizione di un modo di vedere non iconico da parte degli alunni, questa percentuale mostra che il lavoro svolto in classe sulle costruzioni geometriche è in grado di far acquisire tale modo di vedere anche ai bambini più giovani. Ci sembra inoltre possibile concludere, confrontando i risultati della IV e della V, che le competenze in questo campo evolvono velocemente nei bambini e che esse raggiungono un livello adeguato al compito proposto già all'inizio dell'ultimo anno della scuola primaria. La scelta di coinvolgere nella ricerca due classi diverse tra loro, soprattutto dal punto di vista della maturazione cognitiva dei bambini, è stata importante anche da questo punto di vista, poiché ha consentito di inquadrare il fenomeno in una prospettiva di evoluzione in verticale, ma anche di mostrare che esso può essere affrontato a diversi livelli.

In riferimento ai risultati relativi al completamento del testo *cloze*, riteniamo che la casualità nella determinazione delle parole da inserire per completarlo, in quanto frutto dell'applicazione di un algoritmo oggettivo che può essere assimilato a un campionamento casuale, rappresenti un importante fattore a favore dell'indipendenza dei risultati della ricerca dalla scelta del testo iniziale, tenendo naturalmente conto dei vincoli imposti dall'età cognitiva dei soggetti coinvolti, che hanno influenzato la sua formulazione iniziale.

La richiesta finale, rivolta ai bambini di V, di prendere un foglio e di disegnare un triangolo equilatero da regalare come ricordo alla persona che ha svolto la ricerca, è stata espressa volutamente dopo aver dichiarato che il lavoro era terminato, dopo aver lodato i bambini per il loro impegno e aver creato una situazione più simile a quella che si ha durante la ricreazione o durante attività ludiche in generale. Il fatto di chiedere loro di eseguire il disegno su un foglio non consegnato dalla ricercatrice aveva la finalità di farli sentire liberi di eseguire la richiesta solo se lo desideravano e nel modo in cui ritenevano più opportuno farlo. Dato che l'85% dei bambini aveva ottenuto un indice di comprensione positivo nella somministrazione del testo *cloze* e aveva dunque adottato un modo di vedere non iconico durante il completamento, ci si poteva aspettare che una percentuale elevata di allievi adottasse la riga e il compasso per costruire un triangolo equilatero, riconoscendo il vantaggio della costruzione almeno in termini di accuratezza rispetto al disegno a mano libera. Il fatto che solo il 50% dei bambini della classe abbia usato la riga e il compasso per soddisfare questa richiesta, mostra che l'educazione al modo di vedere non iconico richiede un lavoro mirato e prolungato nel tempo, che stabilizzi l'apprendimento e consenta all'alunno di ricorrere a esso spontaneamente, anche in situazioni che non lo richiedono esplicitamente.

Infine, riteniamo importante sottolineare che la nostra è stata una ricerca di carattere intensivo, mirata all'inquadramento e alla caratterizzazione di un fenomeno che intendevamo studiare; questo non vieta naturalmente che da essa possano scaturire anche ricerche estensive e comparative su più larga scala, che sarebbero però tutt'altra cosa e, per loro stessa natura, richiederebbero tempi molto più lunghi e metodologie di ricerca diverse. Per quanto riguarda la presente ricerca, il tempo previsto per la sperimentazione: due ore in ciascuna delle due classi, è stato pienamente sufficiente per svolgere l'attività.

10. Risposte alle domande di ricerca

La ricerca condotta conferma l'ipotesi relativa alla prima domanda di ricerca, cioè il fatto che il coordinamento di due registri semiotici è un ostacolo importante alla produzione di costruzioni con riga e compasso. Inoltre, la ricerca ha consentito di mostrare che la proiezione di un video muto, quindi la riduzione a una riproduzione gestuale dei passaggi della costruzione, consente di rendere le costruzioni con riga e compasso cognitivamente accessibili anche ai bambini (degli ultimi anni) della scuola primaria.

Riguardo alla seconda domanda di ricerca, un aspetto che necessita di essere ribadito è legato al fatto che la costruzione geometrica in sé, al contrario di quanto si possa credere, non è sufficiente per far adottare agli allievi il modo di vedere non iconico. Questo aspetto è particolarmente importante per far capire perché riteniamo che solo la coppia: "costruzione geometrica - relativa dimostrazione", in cui la dimostrazione è fornita come testo *cloze*, abbia potenzialità particolarmente elevate nell'indurre ad adottare il modo di vedere non iconico. Abbiamo potuto notare che, una volta riconosciuta, la figura costruita appare agli allievi disconnessa dai tracciati ausiliari, essa viene cioè percepita con un modo di vedere puramente iconico, che rileva solo le sue caratteristiche metriche e topologiche. Ciò che consente agli allievi di "spingere" la figura all'interno della costruzione, adottando un modo di vedere non iconico, è la comprensione della relativa dimostrazione, che viene resa più agevole dal completamento di un testo *cloze* piuttosto che dalla sua produzione autonoma.

Riguardo alla terza domanda di ricerca possiamo affermare che il ricorso al modo di vedere non iconico non è spontaneo negli allievi anche se essi l'hanno già adottato in precedenza, addirittura riguardo alla stessa figura geometrica. Infatti, come è stato possibile notare, una volta concluso il lavoro, solo una parte dei bambini (circa la metà della classe e poco più del 40% di coloro che avevano ottenuto una comprensione positiva nel completamento del testo *cloze* e avevano quindi adottato un modo di vedere non iconico) ha mantenuto il modo di vedere non iconico nel rispondere alla richiesta di disegnare un triangolo equilatero, mentre gli altri sono scivolati di nuovo nel modo di vedere iconico nonostante l'attività appena svolta.

11. Conclusioni

La ricerca condotta in classe ha permesso di verificare l'utilità del ricorso a compiti che sfruttano la coppia "costruzioni con riga e compasso - relativa dimostrazione" anche nella scuola primaria. La coordinazione tra queste due componenti è particolarmente utile nell'ottica di un'educazione al modo di vedere non iconico, indispensabile per l'apprendimento in geometria; essa può inoltre costituire un valido primo approccio alla dimostrazione anche per bambini di giovane età (e, a maggior ragione, per allievi della scuola secondaria di primo grado). Particolarmente promettente sembra in questo contesto la somministrazione del testo della dimostrazione sotto forma di testo *cloze*, accessibile cognitivamente anche ai bambini della scuola primaria. L'impiego della formula di comprensione di un testo di matematica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015) ci ha permesso di ottenere una valutazione quantitativa, dunque misurabile, di tale comprensione. In riferimento alla coppia: "costruzione geometrica - relativa dimostrazione", possiamo dire che, dato che la comprensione del testo della dimostrazione è presupposto per l'attribuzione di significato all'attività svolta (l'allievo deve aver compreso i nessi logici tra i vari passaggi per poter adottare il modo di vedere del costruttore nel momento in cui analizza la figura), il grado di comprensione del testo, stabilito tramite la formula di comprensione, misura l'attribuzione di significato all'attività svolta e mette contemporaneamente in evidenza l'eventuale ricorso al modo di vedere non iconico.

Una problematica importante dell'attuazione di attività di questo tipo è legata alla difficoltà che soggetti così giovani incontrano nel riuscire a coordinare due registri semiotici (figurale e discorsivo) durante la fase della costruzione geometrica. I due approcci differenti adottati nella fase iniziale in IV e in V hanno infatti confermato che il coordinamento dei registri semiotici figurale e discorsivo rappresenta un ostacolo all'assolvimento di un compito di questo tipo, ma hanno anche mostrato che tale ostacolo può essere superato efficacemente tramite l'impiego di un video. Questa scelta riduce l'impatto del registro discorsivo nella consegna e rende le costruzioni con riga e compasso cognitivamente accessibili anche a bambini più giovani. Ciò che abbiamo inoltre potuto constatare è che la costruzione con riga e compasso, anche se somministrata con il metodo classico del testo scritto, non è sufficiente di per sé per indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico.

La ricerca ha consentito infine di mostrare che l'educazione al modo di vedere non iconico richiede un lavoro costante e protratto nel tempo perché solo sotto queste condizioni l'alunno si potrà abituare al ricorso a tale modo di vedere anche in situazioni che non lo richiedono esplicitamente e potrà acquisire la necessaria competenza per farne uso spontaneo durante la risoluzione di problemi o nella produzione di dimostrazioni in geometria.

Concludendo, vorremmo infine ribadire che ciò che viene messo in primo piano in questa ricerca non è un approccio concettuale al compito, ma un approccio cognitivo, che non indaga quali sono i concetti o gli oggetti matematici (assiomi, definizioni, teoremi) che lo studente deve conoscere per poter risolvere un dato problema, ma il modo in cui egli deve imparare a *guardare* e infine *vedere* le figure coinvolte, al fine di essere in grado di assolvere al compito assegnato, e come questo modo di vedere possa nascere dall'interazione tra la costruzione e la dimostrazione. Si tratta dunque di un contributo all'individuazione delle cause che impediscono allo studente di entrare cognitivamente nel compito assegnato nonché della sperimentazione di una modalità di lavoro che consente di indurre lo studente ad adottare il modo di vedere non iconico. Come afferma Gabriele Lolli:

> a seconda di quello che si vede si possono fare alcune cose oppure no, e quindi si può continuare in modo diverso a fare e a ragionare (…) ciò che si fa, e le conclusioni che se ne traggono, dipende da quello che si vede. (Lolli, 1996, p. 135)

La presente ricerca ha mostrato che l'educazione a quel modo di vedere "geometrico" che Duval chiama "non iconico" è possibile e auspicabile già alla scuola primaria e che esso può avvenire, adottando certi accorgimenti, anche con gli strumenti classici della geometria: costruzioni con riga e compasso e relativa dimostrazione.

Ringraziamenti

L'autrice ringrazia le insegnanti Roberta Cuoghi, Tina Triglia, Tina De Falco e i bambini delle loro classi della Scuola Primaria "San Giovanni Bosco" di Sassuolo per la loro disponibilità e collaborazione; un ringraziamento è rivolto anche alla PhD Maura Iori per i consigli tecnici che hanno permesso una revisione critica di alcuni punti dell'articolo.

Riferimenti bibliografici

Aglì, F., D'Amore, B., Martini, A., & Sandri, P. (1997). Attualità dell'ipotesi "intra-, inter-, trans-figurale" di Piaget e Garcia. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 20A*(4), 329–361.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66–72.

Baccaglini Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*(3), 225–253.

Bagni, G. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica: Una prospettiva ermeneutica.* Bologna: Pitagora.

Bartolini Bussi, M. G., & Baccaglini Frank, A. (2015). Geometry in early years: Sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 47*(3), 391–405.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746–783). New York: Routledge/Taylor & Francis Group.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches*, *1*(41), 177–182.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

D'Amore, B. (2001). Un contributo sul dibattito su concetti e oggetti matematici: La posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica, 15*(1), 31–56.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso: Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica, 20*(4), 557–583.

D'Amore, B. (2015). Comentarios a los artículos de Raymond Duval. In R. Duval & A. Saenz Ludlow (Eds.), *Selected Works* (pp. 237–253). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). A formula for an objective measurement of students' understanding difficulties of a mathematical text: Evaluative and educational use. *Scientia Paedagogica Experimentali*s, *52*(1–2), 27–58.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del "contratto"*. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 119–162.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.). (2011). *The Sage handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: An ICMI study* (pp. 37–51). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D'Amore). Cham: Springer International Publishing AG. [Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011]. doi:10.1007/978-3-319-56910-9

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162.

Fujita, T., Jones, K., & Miyazaki, M. (2011). Supporting students to overcome circular arguments in secondary school mathematics: The use of the flowchart proof learning platform. *Proceedings of PME35* (Vol. 2, pp. 353–360). Ankara, Turkey: PME.

Gadamer, H. G. (1960). *Wahrheit und Methode: Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*. Tübingen: Mohr Siebeck.

Gagatsis, A. (1980). *La transmission de l'information et son application à deux manuels scolaires*. In *Rapports et Diplômes de DEA en Didactique des Mathématiques* (pp. 81–128). Strasbourg IREM: Université Louis Pasteur.

Gagatsis, A. (1982). *Discrimination des scores au test de clôture et évaluation de la compréhension des textes mathématique* (Thèse de 3e cycle). Université de Louis Pasteur (U.L.P.), Strasbourg, Francia.

Gagatsis, A. (1984). Préalables à une mesure de la compréhension. *Recherches en Didactique des Mathématique*s, *5*(1), 43–80.

Gagatsis, A. (1985). Questions soulevées par le test de clôture. *Revue Française de Pédagogie*, *70*, 41–50.

Gagatsis, A. (1995). Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici. *La matematica e la sua didattica, 9*(2)*,* 136–146.

Gagatsis, A., & Chaney, E. (1983). Le test de clôture en classe. *L'ouvert*, *32*, 21–33.

Healy, L., & Powell, A. (2013). Understanding and overcoming 'disadvantage' in learning mathematics. In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K. -S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 69–100). New York: Springer.

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di dottorato, Università degli Studi di Palermo). Disponibile da http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm.

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher, 33*(7), 14–26.

Jung, M. (2002). *L'ermeneutica*. Bologna: il Mulino. (Lavoro originale pubblicato nel 2001).

Kane, R. B., Byrne, M. A., & Hater, M. A. (1974). *Helping children read mathematics*. New York: American Book Company.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(2), 135–137.

Leung, A., Baccaglini Frank, A., & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 439–460.

Lolli, G. (1996). *Capire la matematica*. Bologna: il Mulino.

Mariotti, M. A. (1996). Costruzioni in geometria: Alcune riflessioni. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 19B*(3), 261–288.

Mariotti, M. A. (2015). Saper vedere in matematica alla luce della ricerca in didattica: Visualizzare in geometria come problema didattico. In G. Anichini, L. M. Giacardi, & E. Luciano (Eds.), *Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica, Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà* [Monografia], *La Matematica nella società e nella cultura*, *8*, 109–142.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational*

Studies in Mathematics, 34(3), 219–248.

Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 181–189.

Owens, K. (2015). *Visuospatial reasoning: An ecocultural perspective for space, geometry and measurement education*. New York: Springer.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée chez l'enfant*. Paris: P.U.F.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205–236). Rotterdam: Sense Publishers.

Rivera, F. (2011). *Towards a visually-oriented school mathematics classrooms: Research, theory, practice, and issues*. New York: Springer.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry education, including the use of new technologies: A survey of recent research. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 277–287). Cham: Springer International Publishing.

Teppo, A. R. (1998). Qualitative research methods in mathematics education [Monograph]. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.

Viganò, R. (1999). *Metodi quantitativi nella ricerca educativa*. Milano: Vita e Pensiero.